



TITLE:

L^2 コホモロジーと交叉ホモロジー(複素解析と複素幾何)

AUTHOR(S):

大沢, 健夫

CITATION:

大沢, 健夫. L^2 コホモロジーと交叉ホモロジー(複素解析と複素幾何).
数理解析研究所講究録 1988, 639: 130-140

ISSUE DATE:

1988-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100170>

RIGHT:

L²コホモロジーと交叉ホモロジー

大沢健夫 (京大数理研)

Takeo OHSAWA

X^- を複素数体 \mathbb{C} 上の準射影的代数多様体 (特異点を許す) とする。解析空間として X^- は $\mathbb{C}P^n$ の部分空間だから、Fubini-Study 計量を X^- の非特異部分 X に制限して X を一つの Kähler 多様体と見なす事が出来る。この微分幾何学的特徴を代数多様体の研究に生かす事によって、W. V. D. Hodge 氏は非常に美しい定理を導いた。

Hodge の定理 X がコンパクトならば

$$\begin{aligned} H^r(X) &\cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X) \\ (*) \\ H^{p,q}(X) &\cong H^{q,p}(X) \end{aligned}$$

但し、 H^r 及び $H^{p,q}$ はそれぞれ de Rham 及び Dolbeault の意味のコホモロジーを表す。

この結果は P. Deligne 氏によって一般化された。彼によれば、 $H^r(X^-)$ 内には X^- の完備化 (コンパクト化) の非特異モデル X^\sim と双有理対応 $X^- \rightarrow X^\sim$ とによって定まる (*) を一般化した構造が存在し、それは functorial である (よって特に非特異モデルのとりかたによらない)。筆者は 3 方程式に関する興味から Hodge の定理の別の一般化を問題にして、Deligne 氏の理論とは独立に次の結果を得た。以下 X^- は常にコンパクトとする。

定理 1 $\text{Sing} X^- := X^- \setminus X$ の X^- に於ける余次元を k とせよ。このとき $r < k-1$ 及び $p+q < k-1$ の範囲で (*) が成立する。

この定理の証明には L^2 コホモロジーを用いる。即ち (*) 式の両辺がそれぞれ

れ対応する L^2 コホモロジー群に同型であることを示すという方法である。そこで、上の範囲以外の次数について L^2 コホモロジー群が何であるかを調べたところ次のことがわかった。

定理 2 X 上に、Fubini-Study 計量と cohomologous かつ完備な Kähler 計量 ds^2 が存在して、

$$(†) \quad H^{r,(2)}(X) \cong I H_{2n-r}(X^-).$$

但し $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $H^{r,(2)}$ は ds^2 に関する L^2 コホモロジー, $I H_{2n-r}$ は交叉ホモロジーを表す。

系 r が奇数ならば $\dim_{\mathbb{C}} I H_r(X^-) \equiv 0 \pmod{2}$.

この系自体は既に斎藤盛彦氏によって (cf. [S]) 全く異なる方法で証明されている。

本稿の目的は、背景の説明は一切抜きにして定理 1、定理 2 の証明の概略を述べることである。証明の詳細又は関連した結果については、拙著 [O-1, 2, 3, 4] 及び竹腰氏との共著 [O-T] に発表、又は発表予定である。また [O-1] の内容は本講究録中の長瀬氏の結果と相補うものなので、そのことについても触れるであろう。

§ 1. L^2 コホモロジーと通常のコホモロジー

M を C^∞ 級可微分多様体とする。 M 上の (複素数値) C^∞ 級 r 形式全体の空間を $C^r(M)$ で表す。外微分作用素 $d : C^r(M) \rightarrow C^{r+1}(M)$ の核を Z^r 、像を B^r としたとき、商加群 Z^r/B^r を M の r 次 de Rham コホモロジー群といい $H^r(M)$ で表す。また、 $C^{r,0}_0(M) := \{f \in C^r(M) \mid \text{supp } f \subset\subset M\}$ とおき、 d の $C^{r,0}_0(M)$ 上への制限 $d|_{C^{r,0}_0(M)}$ の核の、 $d|_{C^{r-1,0}_0(M)}$ の像による商加群を $H^{r,0}_0(M)$ で表す。以下 M はパラコンパクトであるとし、 M の Riemann 計量 ds^2_M を固定する。 M 上の 2 乗可積分 r 形式全体のなす Hilbert 空間を $L^r(M)$ とすると、 $C^{r,0}_0(M)$ は $L^r(M)$ の稠密な部分空間であるから、 $L^r(M) \times L^{r+1}(M)$ 内で $d|_{C^{r,0}_0(M)}$ のグラフの閉包を取るにより閉作

用素 d^- が定義される。 d^- の核を N^r 、像を R^r としたとき N^r/R^{r-1} を Riemann 多様体 (M, ds^2_M) の r 次 L^2 コホモロジー群といい $H^r_{(2)}(M)$ で表す。良く知られているように、 m 次元開球 B^m のユークリッド計量に関する L^2 コホモロジー群について $H^r_{(2)}(B^m) = \{0\}$ ($r > 0$) が成立する。これは、 $H^r(M)$ 或は $H^{r,0}(M)$ の定義に於いて $C^r(M)$ のかわりに局所 2 乗可積分 r 形式全体の空間を考えても良いということだから、包含関係 $C^{r,0}(M) \subset L^r(M)$ から導かれる自然な写像 $i: H^{r,0}(M) \rightarrow H^r_{(2)}(M)$ が次の完全列の一部であることがわかる。

$$\lim_{K \subset\subset M} H^{r-1}_{(2)}(M \setminus K) \rightarrow H^{r,0}(M) \rightarrow H^r_{(2)}(M) \rightarrow \lim_{K \subset\subset M} H^r_{(2)}(M \setminus K)$$

従って、 $H^{r,0}(M) \cong H^r_{(2)}(M)$ である為の一つの判定条件として

$$(1) \quad \lim_{K \subset\subset M} H^{r-1}_{(2)}(M \setminus K) = \lim_{K \subset\subset M} H^r_{(2)}(M \setminus K) = \{0\}$$

を得る。計量 ds^2_M が完備ならば(即ち測地球が常に相対コンパクトならば) 調和形式の空間の双対性と Poincaré の双対性定理により、

$$“(1) \text{ かつ } \dim H^{m-r}(M) < \infty” \text{ ならば } H^{m-r}(M) \cong H^{m-r}_{(2)}(M)$$

を得る。但し $m = \dim M$ 。

M が複素多様体の場合、 $C^{p,q}(M)$ を M 上の C^∞ 級 (p, q) 型微分形式全体の空間とし、複素外微分作用素 $\bar{\partial}: C^{p,q}(M) \rightarrow C^{p,q+1}(M)$ に対し上と同様に核を $Z^{p,q}$ 、像を $B^{p,q}$ と置いて、 $Z^{p,q}/B^{p,q}$ を M の (p, q) 型 Dolbeault コホモロジー群と呼び $H^{p,q}(M)$ で表す。また $C^{p,q}_0(M) := C^{p,q}(M) \cap C^{p,q}_0(M)$ と置き、 $\text{Ker}(\bar{\partial}|_{C^{p,q}_0(M)}) / \text{Im}(\bar{\partial}|_{C^{p,q-1}_0(M)})$ を $H^{p,q}_0(M)$ で表す。 M が Hermite 計量をもつ場合、 $L^r(M)$ の元で (p, q) 型のもの全体から成る部分空間を $L^{p,q}(M)$ とおき、前の様にグラフの閉包を取ることによって $\bar{\partial}$ を閉作用素として拡張しておいてから L^2 コホモロジー群 $H^{p,q}_{(2)}(M)$ を定義すると、上と同様の議論によって、同型 $H^{p,q}_0(M) \cong H^{p,q}_{(2)}(M)$ が成り立つための判定条件

$$(2) \quad \lim_{K \subset\subset M} H^{p,q-1}_{(2)}(M \setminus K) = \lim_{K \subset\subset M} H^{p,q}_{(2)}(M \setminus K) = \{0\}$$

を得る。Mの計量が完備ならば、上と同様にSerre-Malgrangeの双対性定理の系として

“(2)かつ $\dim H^{n-p, n-q}(M) < \infty$ ”ならば $H^{n-p, n-q}(M) \cong H^{n-p, n-q}_{(2)}(M)$

を得る。但し $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ とする。

§ 2. 定理1の証明の概略

$\dim_{\mathbb{C}} X = n$ とする。定理1を示すには、X上の完備Kähler計量で

$$(!) \quad \lim_{K \subset\subset X} H^{p, q}_{(2)}(X \setminus K) = \{0\}, \quad p+q > 2n-k$$

となるものが存在する事を言えば十分である。実際、 $q < k-1$ ならばAndreotti-Grauertの有限性定理 (cf. [A-G]) によって $\dim_{\mathbb{C}} H^{p, q}(X) < \infty$ だから、(!)が成り立てば § 1 で述べた様に、

$$H^{p, q}(X) \cong H^{p, q}_{(2)}(X), \quad p+q < k-1$$

が成立する。さらに計量のKähler性をを使うと、調和形式を見ることにより

$$H^{p, q}_{(2)}(X) \cong H^{q, p}_{(2)}(X)$$

を得る。よってまず (*) の片方

$$H^{p, q}(X) \cong H^{q, p}(X), \quad p+q < k-1$$

が言えたことになる。つぎに

$$H^r(X) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p, q}(X), \quad r < k-1$$

の証明であるが、 $p+q < k-1$ のとき $H^{p, q}(X) \cong H^{p, q}_{(2)}(X)$ であるので再び調和形式を用いる議論によって、任意の $\beta \in H^{p, q}(X)$ に対し β の代表元

$u \in C^{p,q}(X)$ で $\partial u = \bar{\partial} u = 0$ を満たすものが取れることが分かる。しかも次数 $p+q-1$ の微分形式についてこのことを用いると、もし上のような u に対してある $v \in C^{p,q-1}(X)$ があって $\bar{\partial} v = u$ となるならば、 $\partial v' = 0$ を満たす $v' \in C^{p,q-1}(X)$ で $\bar{\partial} v' = u$ となるものも存在することが言える。このことから準同型 $\bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X) \rightarrow H^r(X)$ を得る。これが全単射であることの証明も上と同様である。

さて、実は次のような C^∞ 級発散関数 $\varphi: X \rightarrow (-\infty, 0]$ が存在すれば(!) が成り立つ

(!') ある $c_0 \in \mathbb{R}$ が存在して、 $\varphi(x) < c_0$ なる限り

$$1) \quad |\partial\varphi(x)|^2 < 1/12$$

$$2) \quad |\partial\bar{\partial}\varphi(x)| < 2n$$

$$3) \quad \partial\bar{\partial}\varphi(x) \text{ の固有値 } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ につき、} \\ 1 \leq j \leq k \text{ のとき } 1 - 1/4n < \lambda_j < 1 + 1/4n \text{ かつ} \\ j > k \text{ のとき } -1/4n < \lambda_j.$$

但し、 $|\partial\varphi(x)|$, $|\partial\bar{\partial}\varphi(x)|$ はそれぞれ $\partial\varphi(x)$, $\partial\bar{\partial}\varphi(x)$ の長さを表す。

実際、このとき下位集合 $X_c := \{x | \varphi(x) < c\}$ 上の L^2 コホモロジーについて、制限写像から導かれる準同型

$$H^{p,q}_{(2)}(X_c) \rightarrow H^{p,q}_{(2)}(X_{c'})$$

が $c' < c < c_0$, $p+q > 2n-k$ なる条件下で零写像であることが言える。その証明は基本的にはよく知られた秋月-中野の消滅定理と同様であるから、詳しくは拙論 [O-2] を参照されたい。また条件(!')を満たす発散関数をもつ計量は、空間対 $(X^-, \text{Sing} X^-)$ の $(\mathbb{C}P^N, \mathbb{C}P^{N'})$ (但し $N \gg N' \gg 0$) への埋入を使って、 $\mathbb{C}P^N \setminus \mathbb{C}P^{N'}$ 上の完備 Kähler 計量

$$N^{-1} \partial \bar{\partial} \log (\|z\|^{2N} / (\sum_{i=0}^{N'} (|z_i|^2 / \|z\|^2) \log(|z_i|^2 / \|z'\|^2) + N + 1))$$

を引き戻すことによって得られる。これに対して φ としては、

$$-N^{-1} \log(\sum_{i=0}^{N'} (|z_i|^2 / \|z\|^2) \log(|z_i|^2 / \|z'\|^2) + N + 1)$$

を引き戻したものを取れば良い。但し、 $(z_0: \cdots: z_N)$ を $\mathbb{C}P^N$ の同次座標、 $\mathbb{C}P^{N'}$ の定義式を $z_{N'+1} = \cdots = z_N = 0$ とし、 $z' := (z_{N'+1}: \cdots: z_N)$ とおいた。

§ 3. 交叉ホモロジー

今までどおり X^- をコンパクト n 次元射影的代数多様体、 $\text{Sing } X^-$ をその特異点集合とせよ。広中の特異点解消定理により、正則な位相的埋入 $\iota: (X^-, \text{Sing } X^-) \hookrightarrow (\mathbb{C}P^N, \mathbb{C}P^{N'})$ が存在して、 $\mathbb{C}P^{N'}$ を中心とする二次変換 ι とのファイバー積の一つの既約成分として X^- の一つの特異モデル X^- を作ることが出来る。更に、これに付随した自然な双有理写像 $\phi: X^- \rightarrow X^-$ による $\text{Sing } X^-$ の逆像が正規交叉因子であるようにできる。以後、上のような特異モデル X^- と写像 ϕ を固定して考える。まず広中の定理の系としてつぎの命題を得る。

命題 1 X^- の部分空間の降下例 $X^- = X_n \supset X_{n-1} = \text{Sing } X^- \supset \cdots \supset X_0$ で、次の性質をもつものが存在する。

- i) X_j の各既約成分の次元は j である。
- ii) $X_j \setminus X_{j-1}$ は非特異である。
- iii) 任意の点 $x \in X_j \setminus X_{j-1}$ に対し、 x の $X^- \setminus X_{j-1}$ における近傍 U および正則な retraction $r: U \rightarrow U \cap X_j$ が存在して、
 $(\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(U \cap X_{n-1}))$ は $(\phi^{-1}(r^{-1}(x)), \phi^{-1}(r^{-1}(x) \cap X_{n-1}))$ と $U \cap X_j$ との直積に C^∞ 級可微分同相である。

上の条件 iii) は特に $X_j \setminus X_{j-1}$ の管状近傍が局所的には直積の構造をもつことを言っており、降下例 $X_n \supset \cdots \supset X_0$ がホモロジー論的構造を持つことを示唆している。さて命題 1 から分るように、 X^- は各 X_j を部分複体とする単体的複体の構造をもつ。その i 次元 \mathbb{C} 係数チェイン全体の集合を $C_i(X^-)$ と書こう。

定義 $C_i(X^-)$ の元 ξ で $\dim |\xi| \cap X_{n-j} \leq i-j-1$ かつ $\dim |\partial \xi| \cap X_{n-j} \leq i-j-2$ を満たすものの全体の集合を $IC_i(X^-)$ とし、

$$IH_i(X^-) := \{ \xi \in IC_i(X^-) \mid \partial \xi = 0 \} / \{ \partial \eta \mid \eta \in IC_{i+1}(X^-) \}$$

とおく。 $IH_i(X^-)$ を X^- の i 次交叉ホモロジー群と言う。

つぎに交叉ホモロジー群の基本的性質を述べよう。証明は[B]を参照されたい。

命題 2 $IH_i(X^-)$ は X^- の位相不変量である。よって特に降下列及び単体分割の取り方によらない。

定理 3 X^- 上の細層からなる複体 $S^\circ = \{S^r, d^r\}_{r \geq 0}$ が(つぎの条件1), 2), 3)をすべて満たすとする。

1) 任意の整数 r に対し局所コホモロジー層 $\mathcal{H}^r(S^\circ)$ は各 $X_j \setminus X_{j-1}$ 上局所定数層である。

2) $\mathcal{H}^0(S^\circ)|_X \cong \mathbb{C}_X$, かつ $r \geq 1$ のとき $\mathcal{H}^r(S^\circ)|_X = \{0\}$ 。但し \mathbb{C}_X は X 上の(rankが1の)定数層とする。

3) 任意の点 $x \in X_j \setminus X_{j-1}$ に対し x の近傍 $U \subset X^- \setminus X_{j-1}$ が存在して、 $r \geq n-j$ のとき $H^r(U, S^\circ|_U) = \{0\}$ であり $r \leq n-j-1$ のとき制限準同型により $H^r(U, S^\circ|_U) \cong H^r(U \setminus X_j, S^\circ|_{U \setminus X_j})$ となる。

このときすべての r に対し $H^r(X^-, S^\circ) \cong IH_{2n-r}(X^-)$ である。

§ 4. 定理 2 の証明(スケッチ)

定理 3 をあてはめる事を考えよう。いま計量が与えられたとして、開集合 $U \subset X^-$ に \mathbb{C} 加群 $L^r(U \cap X)$ を対応させることによって X^- 上の層 \mathcal{L}^r が定まる。さらに \mathcal{L}^r の部分層 \mathcal{W}^r を

$$\mathcal{W}^r(U) := \{ f \in \mathcal{L}^r(U) \mid d^- f \in \mathcal{L}^{r+1}(U) \}$$

とおいて定義すると各 \mathcal{W}^r は細層であり、 d^- を余境界作用素として持つ複体 $\mathcal{W}^\circ = \{\mathcal{W}^r, d^-\}_{r \geq 0}$ が得られる。明らかに $H^r_{(2)}(X) \cong H^r(\mathcal{W}^\circ(X^-))$ 。よって定理 3 より、 \mathcal{W}° が上の 1), 2), 3) を満たすような計量に対しては X 上の L^2 コホモロジーについて (†) が成り立つ。そのような計量は、§ 3 で与えられた埋入 $\iota: (X^-, \text{Sing} X^-) \rightarrow (\mathbb{C}P^N, \mathbb{C}P^{N'})$ を用いて $\mathbb{C}P^N \setminus \mathbb{C}P^{N'}$ 上の計量

$$d\sigma^2 := \partial \bar{\partial} (\log(\sum_{i=0}^{N'} (|z_i|^2 / \|z\|^2) \log(|z_i|^2 / \|z'\|^2) + N + 1))^{-1} + \partial \bar{\partial} \log \|z\|^{2N}$$

を引き戻すことにより得られる。この計量 $\iota^* d\sigma^2$ について 1), 2), 3) が成り立つ理由であるが、2) については既に述べたので (cf. § 1) 他の二つについて述べよう。まず 1) は次の補題の系である。

補題 3 (cf. [O-4]) \mathcal{C} を X^\wedge 上の C^∞ 級関数の芽の層とせよ。計量 $\iota^* d\sigma^2$ に関して、任意の整数 r 及び $x \in X^\wedge$ に対し $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^r_x(\phi^* \mathcal{W}^\circ \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}) < \infty$ 。

実際、命題 1, iii) より各 stratum $X_j \setminus X_{j-1}$ に沿って $\iota^* d\sigma^2$ の特異性は一樣なので、1) を言うために必要なことは局所コホモロジー $\mathcal{H}^r(\mathcal{W}^\circ)$ の (各点毎の) 有限次元性のみであり、今 ϕ は固有な連続写像だからそれは上からすぐ従う。次に 3) であるが、§ 1 における議論と同様にして、 L^2 コホモロジーの消滅を言う前半から制限写像の同型を言う後半が従うので、示すべきことは

任意の $x \in X_j \setminus X_{j-1}$ に対し、 $r \geq n - j$ ならば $\mathcal{H}^r_x(\mathcal{W}^\circ) = \{0\}$ 。

だけとなる。このことは次元に関する帰納法により $x \in X_0$ の場合に示せば十分である。ところが $\iota^* d\sigma^2$ の定義から、定理 1 の証明におけると同様に、 $r > n$ ならば $\mathcal{H}^r(\mathcal{W}^\circ) = \{0\}$ であることがわかる。よって、後は

$$(†) \quad \mathcal{H}^n_x(\mathcal{W}^\circ) = \{0\}, \quad x \in X_0.$$

の証明を残すのみとなった。これを言うには二つの補題を必要とする。まず記号を用意しよう。 $\Delta \subset \mathbb{C}$ を原点中心の単位円盤、 $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ とせよ。 \mathbb{C}^{m+n} の座標を $z = (z_1, \dots, z_{m+n})$ とし、 $f(z) := z_{m+1} \cdots z_{m+n}$ とおく。 \mathbb{C}^{m+n} 上のユークリッド計量を ds_0^2 と書き、 $\Delta^m \times \Delta^{*n}$ 上の計量 ds^2_r を次の式により定める。

$$ds^2_r := \frac{ds_0^2}{(1-\log|f|)\log^2(2-\log|f|)} + \frac{df d\bar{f}}{|f|^2(1-\log|f|)^2\log^2(2-\log|f|)}$$

開集合 $U \subset \Delta^m \times \Delta^{*n}$ に対し、 ds_0^2, ds^2_r に関して2乗可積分な U 上の r 形式全体の集合をそれぞれ $L^r_0(U), L^r(U)_r$ と書こう。簡単のため

$$L^r_0(U)_r := L^r_0(U) \cap L^r(U)_r$$

とおく。

補題4 (cf. [O-3]) $du = 0$ をみたす $u \in L^r(\Delta^m \times \Delta^{*n})_r$ に対して原点の開近傍 V が存在して、

- i) $r = m+n$ ならば、 $V \cap (\Delta^m \times \Delta^{*n})$ 上 $dv = u$ なる $L^{m+n-1}_0(V \cap (\Delta^m \times \Delta^{*n}))_r$ の元 v が存在する。
- ii) $0 < r \leq m+n-1$ のとき、さらに $u \in L^r_0(\Delta^m \times \Delta^{*n})$ ならば、 $V \cap (\Delta^m \times \Delta^{*n})$ 上 $dv = u$ を満たす $L^{r-1}_0(V \cap (\Delta^m \times \Delta^{*n}))_r$ の元 v が存在する。

さて包含写像 $X \subset X^-$ を改めて j とおき、 j 及び $\phi: X^+ \rightarrow X^-$ による定数層の r 次順像 $R^r j_* \mathbb{C}_X, R^r \phi_* \mathbb{C}_{X^+}$ を考え、二つの自然準同型

$$\alpha^r: R^r \phi_* \mathbb{C}_{X^+} \longrightarrow R^r j_* \mathbb{C}_X$$

$$\beta^r: R^r \phi_* \mathbb{C}_{X^+} \longrightarrow R^0 j_* j^* R^r \phi_* \mathbb{C}_{X^+}$$

の関係を見る。次の補題は他の目的にも有用であると思われる。

補題5 (cf. [O-4]) $r \geq n$ ならば $\text{Ker } \beta^r \subset \text{Ker } \alpha^r$ 。

(\dagger)の証明 $x \in X_0 \subset \text{Sing } X^-$ であるが、計量 $\iota^* d\sigma^2$ の決め方を見れば、補題4により、 $\mathcal{H}^n_x(\mathcal{W}^0)$ の任意の元は $\phi^{-1}(x)$ の近傍上に C^∞ 級に拡張可能な n 形式で代表される事がわかる。それを g とせよ。 X_0 はdiscreteだから、

帰納法の仮定より x の近傍 W が存在して、任意の $y \in W \setminus \{x\}$ に対して g は $(R^n \phi_* \mathbb{C}_x)_y$ の 0 元を代表するとして構わない。よって補題 5 により、近傍 $W' \ni x$ が存在して $g|_{W' \setminus \text{Sing} X^-}$ は 0 に cohomologous となる。 $\phi^* g$ は $\phi^{-1}(W')$ 上に C^∞ 級 n 形式として拡張できるから、 $\phi^{-1}(\text{Sing} X^-)$ に沿って対数的極をもつ或る $(n-1)$ 形式 h が存在して $\phi^* g|_{\phi^{-1}(W' \setminus \text{Sing} X^-)} = dh$ となる。ところが容易に確かめられるように、 $\phi^{-1}(\text{Sing} X^-)$ に沿って対数的極をもつ $(n-1)$ 形式は $\phi^* \iota^* d\sigma^2$ に関して $(\phi^{-1}(\text{Sing} X^-)$ の近傍上) 2 乗可積分である。これは g が $\mathcal{H}^n_x(W')$ の 0 元を代表する事を示す。

§ 5. 関連した話題

1. 次の予想は有名である。

Cheeger-Goreski-MacPherson の予想 (cf. [C-G-M]) Fubini-Study 計量に関して $H^r_{(2)}(X) \cong I H_{2n-r}(X^-)$.

$\dim_{\mathbb{C}} X^- = 2$ の場合の証明は W. C. Hsiang 氏と V. Pati 氏 [H-P] により与えられた。証明には難点があったが長瀬氏の仕事 [N] はそれを完全にしながら L^2 コホモロジーの解析的な側面を詳しく調べたものである。一般次元の場合には次の結果がある。

定理 4 (cf. [O-1]) $\dim_{\mathbb{C}} \text{Sing} X^- = 0$ ならば、 $r \neq n, n \pm 1$ のとき Fubini-Study 計量に関して $H^r_{(2)}(X) \cong I H_{2n-r}(X^-)$.

当然次も予想されるが筆者はまだ答えを知らない。

予想 $\dim_{\mathbb{C}} \text{Sing} X^- = \ell$ のとき、 $|r - n| > \ell + 1$ ならば Fubini-Study 計量に関して $H^r_{(2)}(X) \cong I H_{2n-r}(X^-)$.

2. $D \subset \mathbb{C}^n$ を対称有界領域、 $\Gamma \subset \text{Aut}(D)$ を振れない数論的部分群とする。 D/Γ の佐武コンパクト化 D^-/Γ に対してつぎが成立することが E. Looijenga 氏によって証明された由である。(これは柏原正樹氏にご教示戴いた。)

定理 5 不変計量に関して $H^r_{(2)}(D/\Gamma) \cong I H_{2n-r}(D^-/\Gamma)$.

3. 開Riemann多様体上の L^2 コホモロジー-或は調和形式については、他に多くのことが知られており枚挙に暇がない。しかしHodgeの定理に関するものはあまり多くないようである。ここでは比較的新しいものとして次の二つの結果を紹介しておこう。

定理6 (cf. H. Donnelly-C. Fefferman [D-F]) $D \subset \mathbb{C}^n$ を強擬凸な有界領域とする。このときBergman計量に関して、 $p+q \neq n$ ならば $H^{p,q}_{(2)}(D) = \{0\}$, $p+q=n$ ならば $\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}_{(2)}(D) = \infty$.

定理7 (cf. 大沢-竹腰 [O-T], Corollary 4.2) n 次元完備Hermite多様体 (X, ds^2) 上に、勾配有界な C^∞ 級発散関数 $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$ で X のコンパクト集合を除いて $\partial \bar{\partial} \varphi = ds^2$ となるものが存在するとき、 $p+q > n$ ならば $H^{p,q}(X) \cong H^{p,q}_{(2)}(X)$.

系 n 次元Kähler多様体内の相対コンパクトな強擬凸領域に対して、 $r > n$ および $p+q > n$ の範囲で(*)が成立する。(冒頭のHodgeの定理を見よ。)

参考文献

- [A-G] Andreotti, A.-Grauert, H., Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 193-259.
- [B] Borel, A. et al., Intersection cohomology, Birkhäuser, 1984.
- [C-G-M] Cheeger, J.-Goresky, M.-MacPherson, R., L^2 -cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties, Ann. Math. Stud. 102, Seminar on Differential Geometry, 1982, 303-340.
- [D-F] Donnelly, H.-Fefferman, C., L^2 -cohomology and index theorems for the Bergman metric, Ann. Math. 118 (1983) 593-618.
- [N] Nagase, M., Remarks on the L^2 -cohomology of singular algebraic surfaces, Preprint.
- [O-1] Ohsawa, T., Hodge spectral sequence on compact Kähler spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 23 (1987), 265-274.
- [O-2] Hodge spectral sequence and symmetry on compact Kähler spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 23 (1987), 613-625.
- [O-3] An extension of Hodge Theory to Kähler spaces with isolated singularities, preprint.
- [O-4] In preparation.
- [O-T] Ohsawa, T.-Takegoshi, K., Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains, to appear in Math. Zeit. 110 (1987).
- [S] Saito, Morihiko, RIMS Preprint.